

بسم الله الرحمن الرحيم

درس حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱) دوره پیش دانشگاهی رشته ریاضی فیزیک

مدرس : علی نوروزی

موضوع : مجموعه کراندار

الف) : مجموعه $A \subset \mathbb{R} (A \neq \emptyset)$ را کراندار از بالا گویند هرگاه α ای در \mathbb{R} باشد بطوریکه برای هر $X \in A$ داشته باشیم: $X \leq \alpha$

مثال ۱ :

مجموعه $A = \{ X | X \in \mathbb{R}, X \leq 7 \}$ از بالا کراندار است و مجموعه $C = \{ X | X \in \mathbb{R}, 7 \leq X \}$ را کرانهای بالای A گویند .

مثال ۲ :

مجموعه $B = \{ X | X \in \mathbb{R}, X < 10 \}$ از بالا کراندار است و مجموعه $D = \{ X | X \in \mathbb{R}, 10 \leq X \}$ را کرانهای بالای B گویند .

نکته :

کوچکترین کرانه بالای مجموعه A را سوپریم A گویند و می نویسند $\text{Sup } A$.
در مثال ۱ ، $\text{Sup } A = 7$ و در مثال ۲ ، $\text{Sup } B = 10$.

ب) : مجموعه $A \subset \mathbb{R} (A \neq \emptyset)$ را کراندار از پایین گویند هرگاه α ای در \mathbb{R} باشد بطوریکه برای هر $X \in A$ داشته باشیم: $\alpha \leq X$

مثال ۳ :

مجموعه $A = \{ X | X \in \mathbb{R}, 5 \leq X \}$ از پایین کراندار است و مجموعه $C = \{ X | X \in \mathbb{R}, X \leq 5 \}$ را کرانهای پایین A گویند .

مثال ۴ :

مجموعه $B = \{ X | X \in \mathbb{R}, 7 < X \}$ از پایین کراندار است و مجموعه $D = \{ X | X \in \mathbb{R}, X \leq 7 \}$ را کرانهای پایین B گویند .

نکته :

بزرگترین کران پایین مجموعه A را انفییموم A گویند و می نویسند $\text{Inf } A$.
در مثال ۳ ، $\text{Inf } A = 5$ و در مثال ۴ ، $\text{Inf } B = 7$.

تعریف مجموعه کراندار :
مجموعه A را کراندار گویند هرگاه از بالا و پایین کراندار باشد .

مثال ۵ :

مجموعه $A = \{ X | X \in \mathbf{R} , 1 < X \leq 11 \}$ کراندار است .

حال جهت تفهیم بیشتر مطلب به مثالهای زیر توجه کنید :

مثال ۶ :

در مجموعه $A = \{ X | X \in \mathbf{R} , [2X] = 7 \}$ کوچکترین کران بالای A چه عددی است ؟

$$[2X] = 7 \rightarrow 7 \leq 2X < 8 \rightarrow 7/2 \leq X < 4 \rightarrow \text{Sup} = 4$$

مثال ۷ :

هرگاه مجموعه $A = \{ X | X \in \mathbf{R} , [X - 1/2] + [X + 1/2] = 19 \}$ باشد مجموعه کرانهای بالای A کدام است ؟

(۱) $[0, +\infty)$

(۲) $[9.5, +\infty)$

(۳) $[10.5, +\infty)$

(۴) $[9.5, 10.5)$

حل :

$$[X - 1/2] + [X + 1/2] = 19 \rightarrow [X - 1/2] + [X - 1/2 + 1] = 19 \rightarrow$$

$$[X - 1/2] + [X - 1/2] + 1 = 19 \rightarrow 2[X - 1/2] = 18 \rightarrow [X - 1/2] = 9$$

$$\rightarrow 9 \leq X - 1/2 < 10 \rightarrow 19/2 \leq X < 21/2 \rightarrow 10.5 \leq X$$

جواب : گزینه ۳

مثال ۸ :

اگر $A = \{ \frac{a}{b} \mid a^2 \leq 7b^2, a, b \in \mathbb{Z}^+ \}$ باشد آنگاه کدام مورد صحیح است؟

(۱) $\text{Sup } A \in A$

(۲) $\text{Sup } A \notin A$

(۳) $\text{Sup } A > \sqrt{7}$

(۴) $\text{Sup } A < \sqrt{7}$

حل :

$$a^2 \leq 7b^2 \rightarrow \frac{a^2}{b^2} \leq 7 \rightarrow \frac{a}{b} \leq \sqrt{7} \rightarrow \text{Sup} = \sqrt{7} \notin A$$

جواب : گزینه ۲

مثال ۹ :

کوچکترین کران بالای مجموعه $A = \{ n+1 / n-3 \mid n \in \mathbb{N} - \{3\} \}$ کدام است؟

(۱) -1

(۲) 1

(۳) 5

(۴) 11/2

حل : اگر چند نقطه از اعضای را بنویسید کوچکترین کرانه بالا را می توانید تشخیص بدهید.

$$n = 1 \rightarrow A_1 = -1$$

$$n = 2 \rightarrow A_2 = -3$$

$$n = 3 \quad \text{تعریف نشده}$$

$$n = 4 \rightarrow A_4 = 5$$

$$n = 5 \rightarrow A_5 = 3$$

Sup = 5 پس جواب گزینه ۳ می باشد .

تبصره :

$n+1 / n-3$ یک دنباله است (جملاتی از تابع هموگرافیک $y = x+1/x-3$) که بزرگترین جمله این دنباله همان عدد 5 است .

تمرین :

۱- $A \in \mathbb{R}$ و $A \neq \emptyset$ و $\text{Sup } A = b$ و $\text{Inf } A = a$ باشد کدام گزینه همواره صحیح میباشد ؟

(۱) $a + 1/n \in A$

(۲) $a - 1/n \notin A$

(۳) $b + 1/n \in A$

(۴) $b - 1/n \in A$

۲- اگر $0 < a < 1 < b$ باشد آنگاه کوچکترین کرانه بالای مجموعه $A = \{ \sqrt[n]{a} + \sqrt[m]{b} \mid m, n \in \mathbb{N} \}$ کدام است ؟

(۱) $a+1$

(۲) $b+1$

(۳) $a+b$

(۴) 2

۳- کوچکترین کرانه بالای $A = \{ \frac{n+1}{n+2} \mid m, n \in \mathbb{N} \}$ کدام است ؟

(۱) -1

(۲) 1

(۳) $+2$

(۴) ندارد

موفق و شاد باشید