

## ماتریس

مدرس : امیر آشوبی

در این بخش به علت گسترده بودن مطالب سعی می کنیم تا حد ممکن مطالب بصورت خلاصه و حساب آسان ارائه شود .

سطر = درایه هایی که در امتداد یک خط قرار دارند

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

مرتبه ماتریس = سطر \* ستون

$$\text{ماتریس سطری} = (a \ b \ c) \leftrightarrow \text{یک سطر و چند ستون}$$
$$\text{و ماتریس ستونی} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \leftrightarrow \text{یک ستون و چند سطر}$$

ماتریس صفر = تمام درایه ها ( در سطر و ستون ) صفر باشند .

ماتریس واحد یا I که ماتریسی مربعی است که قطر اصلی آن ۱ و بقیه درایه های آن صفر می باشد  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

برای ماتریس  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  داریم :

- ۱- قطر اصلی = a , d
- ۲- قطر فرعی = b , c
- ۳- دوسطر و دو ستون دارد
- ۴- ستون = سطر ← ماتریس مربعی
- ۵- ۲\*۲ = مرتبه ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad r = -1 \rightarrow rA? \quad \text{مثال :}$$

$$rA = (-1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

نتیجه : همه درایه ها قرینه می شوند ← قرینه ماتریس

جمع و تفریق دو ماتریس :

- ۱- دو ماتریس هم مرتبه باشند .
- ۲- درایه های نظیر به نظیر با هم جمع یا تفریق می شوند .

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$$

دو ماتریس مساویند هرگاه :

- ۱- هم مرتبه باشند .
- ۲- درایه های نظیر برابر باشند .

ضرب اسکالر ( ضرب عدد حقیقی در ماتریس ) :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, r = 2$$

$$rA = (2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

ضرب ماتریس :

اگر : تعداد ستونهای ماتریس اول = تعداد سطرهای ماتریس دوم ← ضرب ماتریس امکان پذیر است .

$$A_{m \times n} * B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

m = سطر ماتریس اول  
n = ستون ماتریس اول  
n = سطر ماتریس دوم  
p = ستون ماتریس دوم

مثال : اگر  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$  و  $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  باشد آنگاه محاسبه کنید  $A.B$  ؟

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3} * \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 1*2 + 3*2 + 4*1 \\ 1*2 + 5*2 + 2*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \end{pmatrix}_{2 \times 1}$$

$$A + (-A) = 0$$

$$A + 0 = A$$

$$A \times I = I \times A = A$$

حالت‌های موجود جواب در دستگاه :  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ / & / & / \\ a & b & c \end{pmatrix}$

- ۱- اگر  $\frac{a}{a} \neq \frac{b}{b}$  ← دستگاه جواب ندارد .
- ۲- اگر  $\frac{a}{a} = \frac{b}{b} \neq \frac{c}{c}$  ← دستگاه جواب ندارد .
- ۳- اگر  $\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c}$  ← بی شمار جواب دارد .

نکته :

- ۱- ضرب دو ماتریس خاصیت جابجایی ندارد :  $A \cdot B \neq B \cdot A$
- ۲- ضرب ماتریسها خاصیت شرکت پذیری دارد :  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- ۳- ضرب ماتریسها خاصیت توزیع پذیری دارد :  $(B + C) \cdot A = BA + CA$

دترمینان ( برای ماتریسهای مربعی ) :

حاصلضرب عناصر قطر اصلی - حاصلضرب عناصر قطر فرعی =  $\det A = |A|$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow |A| = ad - bc$$

ماتریس الحاقی : در ماتریس  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2 \times 2}$  اعضای قطر اصلی جابجا و اعضای قطر فرعی قرینه می شود .

ماتریس معکوس :  $A^{-1}$  معکوس ماتریس  $A$  است و به صورت زیر بدست می آید :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} * \text{ماتریس الحاقی}$$

اگر :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

اگر  $\det A = 0$  شود ← ماتریس معکوس پذیر است .

حال دستگاه دو معادله دو مجهول (با استفاده از ماتریس معکوس) :

دستگاه دو معادله دو مجهول زیر مفروض است :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

از دستگاه فوق داریم :

$$\text{ماتریس ضرایب} = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

$$\text{ماتریس مجهولات} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{ماتریس معلومات} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$$

ماتریس معلومات \* معکوس ماتریس ضرایب = ماتریس مجهولات

ماتریس تقارن :

$$\begin{aligned} 1- \text{ماتریس متقارن نسبت به محور } x \text{ ها} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ 2- \text{ماتریس متقارن نسبت به محور } y \text{ ها} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

حالت‌های موجود جواب در دستگاه :  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$

- ۴- اگر  $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$  ← دستگاه جواب دارد .
- ۵- اگر  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$  ← دستگاه جواب ندارد .
- ۶- اگر  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$  ← بی شمار جواب دارد .