

تعریف : $[x] =$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x یا

$$[x] = \max \{n \mid n \in \mathbb{Z}, n \leq x\}$$

$$(n \in \mathbb{Z} \text{ و } x \in \mathbb{R} \text{ که } n \leq x < n+1 \rightarrow [x] = n)$$

مثال : $[5] = 5$ و $[\sqrt{2}] = 1$ و $[-1.7] = -2$ و $[2.5] = 2$

نکات :

- ۱ $[x] \leq x < [x] + 1$
- ۲ $0 \leq x - [x] < 1$
- ۳ $x - 1 \leq [x] < x$
- ۴ $[x] = x, x \in \mathbb{Z}$
- ۵ $[x] \in \mathbb{Z}$
- ۶ $[x+n] = [x] + n \quad n \in \mathbb{Z}$
- ۷ $[x] + [-x] = 0 \quad x \in \mathbb{Z}, -1 < x \notin \mathbb{Z}$
- ۸ $[x+y] = [x] + [y] \text{ or } [x] + [y] + 1$

اثبات مورد ۸ :

$$x \in \mathbb{R} : [x] \leq x < [x] + 1$$

$$y \in \mathbb{R} : [y] \leq y < [y] + 1$$

$$[x] + [y] \leq x+y < [x] + [y] + 2$$

$$۱ \quad [x] + [y] \leq x+y < [x] + [y] + 1 \rightarrow [x+y] = [x] + [y]$$

یا

$$۲ \quad [x] + [y] + 1 \leq x+y < [x] + [y] + 2 \rightarrow [x+y] = [x] + [y] + 1$$

مثال ۱: معادله $[3x + 4] = 5$ را حل کنید :

$$[3x + 4] = 5 \rightarrow 5 \leq 3x + 4 < 6 \rightarrow 1 \leq 3x < 2 \rightarrow \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$$

مثال ۲: معادله $[x - \frac{1}{2}] + [x + \frac{1}{2}] = 3$ را حل کنید :

$$[x - \frac{1}{2}] + [x + \frac{1}{2}] = [x - \frac{1}{2} + x + \frac{1}{2}] \rightarrow [2x] = 3 \rightarrow 3 \leq 2x < 4 \rightarrow \frac{3}{2} \leq x < 2$$

یا

$$[x - \frac{1}{2} + x + \frac{1}{2}] = [x - \frac{1}{2}] + [x + \frac{1}{2}] + 1 \rightarrow [2x] = 4 \rightarrow 4 \leq 2x < 5 \rightarrow 2 \leq x < \frac{5}{2}$$

$$1.5 \leq x < 2.5$$

مثال ۳: معادله $[x - 1] + [-x] + [2x] = 0$ را حل کنید :

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{Z} \quad [x] - 1 + [-x] + 2[x] = 0 &\rightarrow -1 + [2x] = 0 \rightarrow [2x] = 1 \\ [x] - [-x] = 0 &\rightarrow 1 \leq 2x < 2 \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{aligned}$$

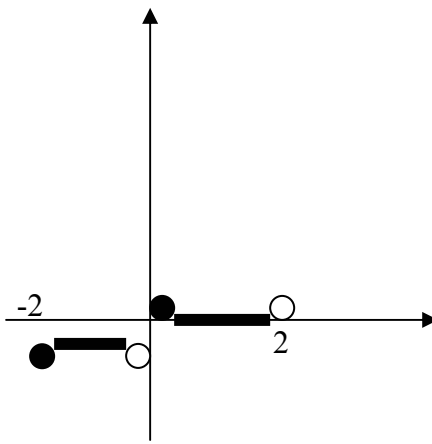
$$\begin{aligned} x \notin \mathbb{Z} \quad [x] + [-x] = -1 &\rightarrow -2 + [2x] = 0 \rightarrow [2x] = 2 \\ &\rightarrow 2 \leq 2x < 3 \\ &\rightarrow 1 \leq x < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

جواب $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

رسم جزء صحیح :

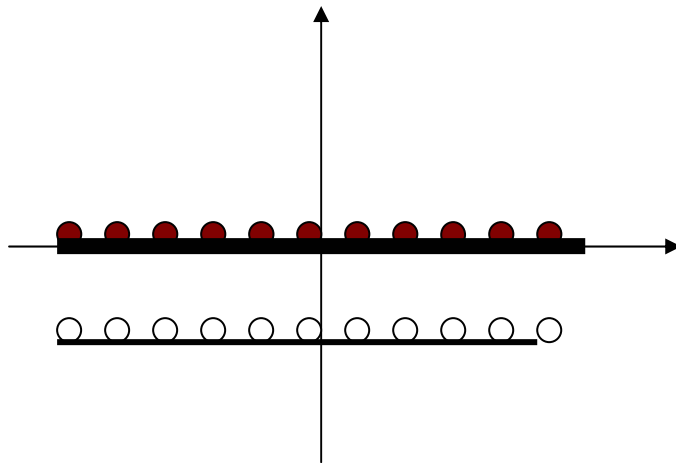
مثال ۴: نمودار تابع $y = [\frac{1}{2}x]$ را در $(-2, 2)$ رسم کنید :

$$\begin{aligned} -2 \leq x < 2 &\rightarrow -1 \leq \frac{1}{2}x < 1 \\ -1 \leq \frac{1}{2}x < 0 &\rightarrow [\frac{1}{2}x] = -1 \rightarrow y = -1, -2 \leq x < 0 \\ 0 \leq \frac{1}{2}x < 1 &\rightarrow [\frac{1}{2}x] = 0 \rightarrow y = 0, 0 \leq x < 2 \end{aligned}$$

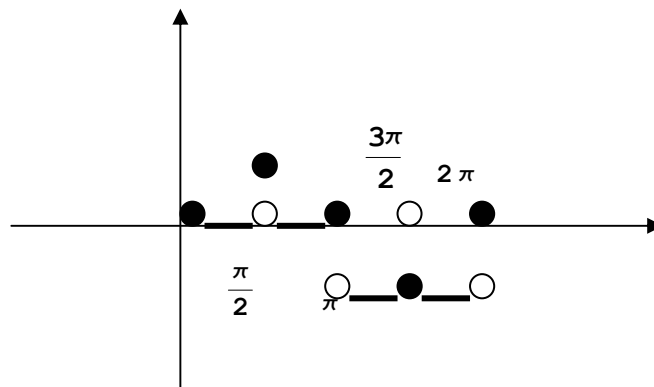
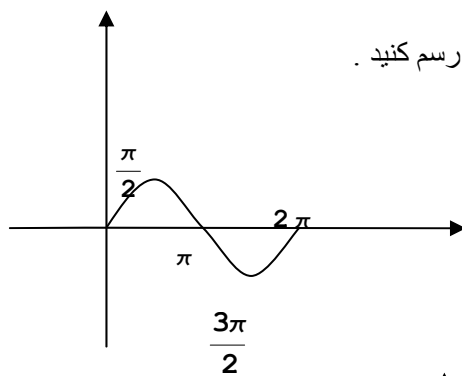


مثال ۵: نمودار $y = [x] + [-x]$ را رسم کنید.

$$[x] + [-x] = 0 \quad x \in \mathbb{Z}, \quad -1 \quad x \notin \mathbb{Z}$$



مثال ۶: نمودار $y = [\sin x]$ را در $[0, 2\pi]$ رسم کنید.



$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \leq \sin x < 1 \rightarrow [\sin x] = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} \rightarrow [\sin x] = 1$$
$$\frac{\pi}{2} \leq x < \pi \rightarrow 0 \leq \sin x < 1 \rightarrow [\sin x] = 0$$
$$\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} \rightarrow -1 \leq \sin x < 0 \rightarrow [\sin x] = -1, \quad x = 4\pi \rightarrow [\sin x] = 0$$

به امید موفقیت همه شما دوستان .

این درسها توسط مهندس علی نوروزی تدریس شده است .

Copyright © www.ryazi.4t.com