

قدر مطلق

تعريف: $|X| = X, x \geq 0$ or $|X| = -X, x < 0$

$$|X| = \max \{-x, x\}$$

مثال ۱: $|1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$ چون $(1-\sqrt{2} < 0)$

مثال ۲: اگر $\sqrt{x-1} < 5$ باشد حاصل $|X-1| + |X-3|$ کدام است؟

حل:

$$\sqrt{x-1} < 5 \rightarrow 0 \leq X-1 < 25 \rightarrow 1 \leq X < 26$$

$$|X-1| + |X-3| \rightarrow X-1-X+3=2$$

خواص مهم قدر مطلق:

1- $|-X| = |X|$

2- $|X-Y| = |Y-X|$

3- $|x^2| = x^2$

4- $\sqrt{x^2} = |X|$

5- $|X*Y| = |X| * |Y|$

6- $\left| \frac{x}{y} \right| = |X| / |Y|$

7- $\forall X \in \mathbb{R} \rightarrow -|X| \leq X < |X|$

8- $|X| \leq a, a > 0 \leftrightarrow -a \leq x \leq a$

9- $|X| \geq a \leftrightarrow x \geq a$ OR $x \leq -a$

10- $|X+Y| \leq |X| + |Y|$

11- $|X-Y| \leq |X| + |Y|$

12- $|X| - |Y| \leq |X-Y|$

$$13 - \left| |X| - |Y| \right| \leq |X-Y|$$

چند مورد از خواص فوق را اثبات می کنیم :

$$A) X \geq 0 \rightarrow |X| = X \rightarrow -x \leq x \leq x \rightarrow -|X| \leq x \leq |X|$$

همواره برقرار است

$$B) X \leq 0 \rightarrow |X| = -X \rightarrow -(-x) \leq x \leq -x \rightarrow -|X| \leq x \leq |X|$$

$$A,B) -|X| \leq x \leq |X|$$

خواص ۸ :

$$A) \begin{array}{l} |X| \leq a \quad , \quad a > 0 \quad \text{فرض} \\ -a \leq x \leq a \quad \quad \quad \text{حکم} \end{array}$$

$$|X| \leq a \rightarrow x^2 \leq a^2 \rightarrow |X| \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a$$

B)

$$\begin{array}{l} -a \leq x \leq a \quad \text{فرض} \\ |X| \leq a \quad \quad \quad \text{حکم} \end{array}$$

(اثبات):

$$\begin{array}{l} -a \leq x \leq 0 \rightarrow |X| = -X \rightarrow -|X| = X \\ \rightarrow -a \leq |X| \rightarrow |X| \leq a \\ -a \leq X \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0 \leq x \leq a \rightarrow |X| = X \\ \rightarrow |X| \leq a \\ X \leq a \end{array}$$

مثال ۳ : نامعادله زیر را حل کنید : $|3X-4| \leq 7$

$$|3X-4| \leq 7 \rightarrow -7 \leq 3X-4 \leq 7 \rightarrow -7+4 \leq 3X \leq 7+4 \rightarrow -3 \leq 3X \leq 11$$

$$\rightarrow -1 \leq X \leq \frac{11}{3}$$

مثال ۴) نامعادله زیر را به صورت قدر مطلق بنویسید: $3 \leq x \leq 7$

حل: ابتدا میانگین ۳ و ۷ که برابر ۵ می باشد از طرفین کم می کنیم:

$$3-5 \leq x-5 \leq 7-5 \rightarrow -2 \leq x-5 \leq 2 \rightarrow |x-5| \leq 2$$

اثبات - خواص ۱۰ - (نامساوی مثلثاتی)

$$\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow -|x| \leq x \leq |x|$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow -|y| \leq y \leq |y|$$

$$-(|x| + |y|) \leq x+y \leq |x| + |y| \rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$$

خواص ۱۳:

$$|x| = |x+y-y| \leq |x-y| + |y| \rightarrow |x| - |y| \leq |x-y|$$

$$\rightarrow |x| - |y| \leq |x-y| \quad (1)$$

$$|y| = |y+x-x| \leq |y-x| + |x| \rightarrow |y| - |x| \geq -|y-x|$$

$$\rightarrow |x| - |y| \geq -|x-y| \quad (2)$$

$$(1) \quad (2) \rightarrow |x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y| \rightarrow ||x| - |y|| \leq |x-y|$$

به امید موفقیت همه شما دوستان.